(h) Solve by Euler's method the following differential equation at $x = 0{\cdot}1$ correct to four decimal places.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$$

with one initial condition $y(0) = 1$.

অইলাৰ পদ্ধতিৰ সহায়ত তলত উল্লেখ কৰা অৱকল সমীকৰণটো $x = 0{\cdot}1$ বিন্দুত চতুৰ্থ দশমিক স্থানলৈ সমাধান কৰা য'ত $y(0) = 1$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$$

Total number of printed pages–24

3 (Sem–4/CBCS) MAT HG/RC

2024

MATHEMATICS

(Honours Generic/Regular)

Answer the Questions from any one Option.

OPTION – A

(Real Analysis)

Paper : MAT–RC–4016/MAT–HG–4016

Full Marks : 80

Time : Three hours

OPTION – B

(Numerical Analysis)

Paper : MAT–HG–4026

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Answer ***either*** *in English* ***or*** *in Assamese.*

OPTION – A

(Real Analysis)

Paper : MAT–RC–4016/MAT–HG–4016

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) If $a \neq 0$ and b in $\mathbb{R}$ are such that $a, b = 1$, then $b =$ ______. *(Fill in the blank)*

যদি $a \neq 0$ আৰু b $\mathbb{R}$ ত থাকে য'ত $a, b = 1$ হয়, তেন্তে $b =$ ______ । *(খালী ঠাই পূৰ কৰা)*

(b) State triangle inequality.

ত্ৰিভুজ অসমতা উৎথাপন কৰা।

(c) If $S = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$. Find *sup S*.

যদি $S = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$ হয়, তেন্তে S ৰ লঘিষ্ঠ উচ্চসীমা কিমান?

(d) When is a set called bounded ?

এটা সংহতিক কেতিয়া বদ্ধ বোলে?

(e) The sequence $\left((-1)^n\right)$ is a Cauchy sequence. *(True **or** False)*

$\left((-1)^n\right)$ অনুক্ৰমটো কশিচ হয়। *(সঁচা নে মিছা)*

(f) Write down the range of the sequence (0, 2, 0, 2, 0, 2, ...)

(0, 2, 0, 2, 0, 2, ...) অনুক্ৰমটোৰ সীমা লিখা।

(g) State the completeness property of $\mathbb{R}$.

$\mathbb{R}$ ৰ সম্পূৰ্ণতা ধৰ্মটো লিখা।

(h) Define monotone increasing sequence.

ক্ৰমবৰ্ধমান অনুক্ৰমৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(i) If the series Σx_n converges, find $lim(x_n)$.

যদি Σx_n শ্ৰেণীটো অভিসাৰী হয়, তেন্তে $lim(x_n)$ ৰ মান কিমান?

(j) When is a series said to be conditionally convergent ?

কেতিয়া এটা অসীম শ্ৰেণীক চৰ্তসাপেক্ষে অভিসাৰী বুলি কোৱা হয়?

2. Answer the following : ***(any five)*** 2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া ঃ *(যিকোনো পাঁচটা)*

(a) Define closed set and give one example.

বন্ধ সংহতিৰ সংজ্ঞা লিখা আৰু এটা উদাহৰণ দিয়া।

(b) Show that $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)=0$

দেখুওৱা যে $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}\right)=0$

(c) Let *a, b, c* be any elements of $\mathbb{R}$. Then show that

(i) If $a>b$ and $c>0$, then $ca>cb$.

(ii) If $a>b$ and $c<0$, then $ca<cb$.

ধৰা হ'ল *a, b, c* $\mathbb{R}$-ৰ *যিকোনো তিনিটা* মৌল। তেন্তে দেখুওৱা যে

(i) যদি $a>b$ আৰু $c>0$, তেন্তে $ca>cb$।

(ii) যদি $a>b$ আৰু $c<0$, তেন্তে $ca<cb$।

(d) $S=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$, show that $\sup S=1$ and $\inf S\geq 0$.

$S=\left\{\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$, দেখুওৱা যে $\sup S=1$ আৰু $\inf S\geq 0$.

(e) Show that the sequence $\left(1+(-1)^n\right)$ is not a Cauchy sequence.

দেখুওৱা যে $\left(1+(-1)^n\right)$ অনুক্ৰমটো কচিছ নহয়।

(f) Show that $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverges.

দেখুওৱা যে $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ শ্ৰেণীটো অপসাৰী।

3. Answer ***any four*** : 5×4=20

যিকোনো চাৰিটাৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) If x and y are two real numbers with $x<y$, then prove that

(i) there exists a rational number r such that $x<r<y$

(ii) there exists an irrational number z such that $x<z<y$

3+2=5

যদি x আৰু y দুটা বাস্তৱ সংখ্যা হয় য'ত $x < y$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

(i) এনেকুৱা এটা পৰিমেয় সংখ্যা r থাকিব, যাতে $x < r < y$ হয়।

(ii) এনেকুৱা এটা অপৰিমেয় সংখ্যা z থাকিব, যাতে $x < z < y$ হয়।

(b) Define Cauchy sequence. Show that the sequence $\left(1+(-1)^n\right)$ is not a Cauchy sequence.

কশ্চি অনুক্ৰমৰ সংজ্ঞা দিয়া। দেখুওৱা যে $\left(1+(-1)^n\right)$ অনুক্ৰমটো কশ্চি নহয়।

(c) Test the convergence and absolute convergence of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$$ 4+1=5

তলৰ শ্ৰেণীটোৰ অভিসাৰিতা আৰু নিৰংকুশ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$$

(d) Prove that a sequence in $\mathbb{R}$ can have at most one limit.

প্ৰমাণ কৰা যে $\mathbb{R}$ ৰ এটা অনুক্ৰমৰ অত্যাধিক এটা সীমা থাকে।

(e) Show that (দেখুওৱা যে)

(i) $||x|-|y|| \leq |x-y|$

(ii) $|x-y| \leq |x|+|y|,\ x, y \in \mathbb{R}$

(f) A function f defined in the set of real numbers by

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{when } x \text{ is irrational} \\ -1, & \text{when } x \text{ is rational} \end{cases}$$

show that f is discontinuous at every point.

এটা বাস্তৱ সংহতিৰ ফলন এনেদৰে সংজ্ঞাবদ্ধ

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{যেতিয়া } x \text{ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা} \\ -1, & \text{যেতিয়া } x \text{ এটা পৰিমেয় সংখ্যা} \end{cases}$$

দেখুওৱা যে f ফলনটো সকলো বাস্তৱ বিন্দুতে অনবিচ্ছিন্ন।

4. Answer the following questions : 10×4=40

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) (i) Show that $\sqrt{2}$ is not a rational number.

দেখুওৱা যে $\sqrt{2}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা নহয়।

(ii) Write down all the algebraic properties of $\mathbb{R}$. 5+5=10

$\mathbb{R}$ ৰ সকলো বীজগণিতীয় ধৰ্মসমূহ লিখা।

Or / অথবা

(i) Define supremum of a nonempty subset S of $\mathbb{R}$.

Prove that an upper bound u of a nonempty set S in $\mathbb{R}$ is the supremum of S iff for every $\varepsilon > 0$, $\exists$ an $s_\varepsilon \in S$ such that $u - \varepsilon < s_\varepsilon$. 2+3=5

(ii) If $x > -1$, then prove that

$(1+x)^n \geq 1 + nx \ \ \forall \, n \in \mathbb{N}$ 3

(iii) Determine the set

$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x > 2 \}$ 2

(i) $\mathbb{R}$ ৰ এটা অশূন্য উপসংহতি S ৰ বাবে লঘিষ্ঠ উচ্চ সীমাৰ সংজ্ঞা লিখা। প্ৰমাণ কৰা যে $\mathbb{R}$ ৰ এটা অশূন্য সংহতি S ৰ উচ্চ সীমা u টো S ৰ লঘিষ্ঠ উচ্চ সীমা হ'ব যদি আৰু যদিহে প্ৰতিটো $\varepsilon > 0$ ৰ বাবে $s_\varepsilon \in S$ থাকে য'ত $u - \varepsilon < s_\varepsilon$ ।

(ii) যদি $x > -1$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে

$(1+x)^n \geq 1 + nx \ \ \forall \, n \in \mathbb{N}$

(iii) $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x > 2 \}$ সংহতিটো নিৰ্ণয় কৰা।

(b) State and prove Squeege theorem. Show that the sequence (x_n), where

$$x_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2n)^2}$$

converges to zero. 5+5=10

কুইজ উপপাদ্য লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা। দেখুওৱা যে (x_n) অনুক্ৰমটো অভিসাৰী, য'ত

$$x_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(2n)^2}$$

Or / অথবা

Define monotone sequence. Prove that a monotone sequence of real numbers is convergent if and only if it is bounded.

একদিষ্ট অনুক্ৰমৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে বাস্তব সংখ্যাৰ এটা একদিষ্ট অনুক্ৰম অনুসৰি হ'ব যদি আৰু যদিহে ই পৰিবদ্ধ হয়।

(c) Test the convergence of sequences (x_n) and (y_n) as defined below and find the limit if exists for each. 5+5=10

তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাবদ্ধ অনুক্ৰম (x_n) আৰু (y_n) ৰ অভিসাৰিতাৰ পৰীক্ষা কৰা আৰু স্থিত হ'লে অভিসাৰি বিন্দু নিৰ্ণয় কৰা।

(i) $x_n = \dfrac{3n+2}{n+1}$

(ii) $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Or / অথবা

Prove that a convergent sequence is bounded. Give a counter example to show that a bounded sequence may not be convergent. 8+2=10

প্ৰমাণ কৰা যে অভিসাৰি অনুক্ৰম এটা সদায় পৰিবদ্ধ হয়। এটা উদাহৰণৰ সহায়ত দেখুওৱা যে পৰিবদ্ধ অনুক্ৰম এটা অভিসাৰি নহ'বও পাৰে।

(d) Test the convergence of the following series : 5+5=10

তলৰ শ্ৰেণীসমূহৰ অভিসাৰিতা পৰীক্ষা কৰা ঃ

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

Or / অথবা

Let $X=(x_n)$ and $Y=(y_n)$ be real sequences and suppose that for some $K \in \mathbb{N}$, $0 \le x_n \le y_n$ for $n \ge K$ then prove that

(a) the convergence of Σy_n implies the convergence of Σx_n.

(b) the divergence of Σx_n implies the divergence of Σy_n

ধৰা $X=(x_n)$ আৰু $Y=(y_n)$ দুটা বাস্তৱ অনুক্ৰম আৰু ধৰা $K \in \mathbb{N}$, $0 \le x_n \le y_n$, য'ত $n \ge K$ তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে,

(a) Σy_n অভিসাৰী হ'লে Σx_n অভিসাৰী হয়।

(b) Σx_n অপসাৰী হ'লে Σy_n অপসাৰী হয়।

OPTION – B

(Numerical Analysis)

Paper : MAT–HG–4026

1. Answer the following questions : 1×10=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) In Gauss Elimination method for solving system of equation $AX=B$, the matrix A is reduced to

Gauss Elimination পদ্ধতিত, $AX=B$ সমীকৰণ প্ৰণালী সমাধান কৰোতে মৌলকক্ষ A কোনটো ৰূপলৈ ৰূপান্তৰ হয়?

(i) Upper triangular matrix

উচ্চ ত্ৰিকোণীয় মৌলকক্ষ

(ii) Lower triangular matrix

নিম্ন ত্ৰিকোণীয় মৌলকক্ষ

(iii) Diagonal matrix

কৰ্ণ মৌলকক্ষ

(iv) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(Choose the correct option)

(শুদ্ধ উত্তৰটো বাচি উলিওৱা)

(b) What is the difference between direct methods and iterative methods for solving a system of Linear equations ?

ৰৈখিক সমীকৰণৰ গোট সমাধান কৰা প্ৰত্যক্ষ বিধি আৰু পুনৰাবৃত্তি বিধিৰ পাৰ্থক্য কি?

(c) Define operator Δ and E.

Δ আৰু E সংকাৰকৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(d) Find $\Delta^{n+1}x^n$ = ?

$\Delta^{n+1}x^n$ ৰ মান উলিওৱা।

(e) The value of $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+x^2}$ is

$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+x^2}$ ৰ মান

(i) 0

(ii) 1

(iii) 2

(iv) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(Choose the correct option)

(শুদ্ধ উত্তৰটো বাচি উলিওৱা)

(f) Write down Newton's forward interpolation formula.

নিউটনৰ অগ্ৰগামী অন্তৰ্বেশন সূত্ৰটো লিখা।

(g) State the formula for Simpson's $\frac{3}{8}$th rule.

চিম্পচনৰ $\frac{3}{8}$তম নিয়মৰ সূত্ৰটো উল্লেখ কৰা।

(h) What do you mean by Numerical Differentiation ?

সংখ্যাত্মক অৱকলন বুলিলে কি বুজা?

(i) Where is Euler's method used ?

Euler's method ক'ত ব্যৱহাৰ কৰা হয়?

(j) What is the disadvantage of Taylor series method in differential equation.

অৱকল সমীকৰণৰ ক্ষেত্ৰত টেইলৰ শ্ৰেণী পদ্ধতিৰ অসুবিধা কি?

2. Answer the following questions : 2×5=10

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Prove that $E = I + \Delta$, where I is the identity operator.

প্ৰমাণ কৰা যে $E = I + \Delta$ য'ত I এটা একক সংকাৰক।

(b) Show that the third divided difference of the function $f(x)=\frac{1}{x}$ with arguments a, b, c, d is $-\frac{1}{abcd}$.

যদি $f(x)=\frac{1}{x}$ হয়, ৰাশিসূচক a, b, c, d ৰ কাৰণে তৃতীয় বিভাজিত অন্তৰৰ মান $-\frac{1}{abcd}$ হয় বুলি দেখুওৱা।

(c) Express $f(x)=2x^3-3x^2+3x-10$ into factorial notation.

$f(x)=2x^3-3x^2+3x-10$ ৰাশিটো ক্ৰমগণিত সংকেত চিনত প্ৰকাশ কৰা।

(d) What are the advantages of Lagranges interpolation formula ?

লাগ্ৰাঞ্জৰ অন্তৰ্বেশন সূত্ৰটোৰ সুবিধাবোৰ কি কি?

(e) What is extrapolation ? Name an extrapolation method.

Extrapolation মানে কি? এটা extrapolation বিধিৰ নাম লিখা।

3. Answer ***any four*** questions from the following : 5×4=20

তলৰ *যিকোনো চাৰিটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Solve the following system of equation by Gauss elimination method :

Gauss elimination পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি সমাধান কৰা ঃ

$$2x-y+3z=9$$
$$x+y+z=6$$
$$x-y+z=2$$

(b) Prove that (প্ৰমাণ কৰা যে)

$$e^x=\left(\frac{\Delta^2}{E}\right)e^x\frac{Ee^x}{\Delta^2 e^x}$$

where 'h' is the interval of differencing.

য'ত 'h' ৰাশিজ অন্তৰাল হয়।

(c) Find the polynomial $f(x)$ by using Lagrange's formula and hence find $f(3)$ for :

লাগ্ৰাঞ্জৰ অন্তৰ্বেশন সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰি বহুপদ $f(x)$ ৰ মান উলিওৱা আৰু $f(3)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা ঃ

x	0	1	2	5
$f(x)$	2	3	12	147

(d) Estimate the missing figure of the following table :

তলত দিয়া তালিকাখনৰ খালী ঠাই পূৰ কৰা ঃ

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	5	7	—	32

(e) Find $y'(x)$ from the following table given below and hence find $y'(0)$.

তলৰ টেবুলখনৰ x আৰু y ৰ মান ব্যৱহাৰ কৰি $y'(x)$ আৰু $y'(0)$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

x	0	1	2	3	4
y	4	8	15	7	6

(f) Use Trapezoidal Rule to find the value of $\int_0^6 \frac{dx}{1+x}$ by taking six ordinates.

ছয়টা অন্তৰাল লৈ ট্ৰেপিজইডেল নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰি $\int_0^6 \frac{dx}{1+x}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer ***any four*** questions from the following : 10×4=40

তলৰ *যিকোনো চাৰিটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Solve the system of equation correct to 3 decimal places using Jacobi's iteration method :

জেকবি পুনৰাবৃত্তি পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ ৰৈখিক সমীকৰণ গোটৰ সমাধান 3 দশমিক স্থানলৈ শুদ্ধকৈ উলিওৱা ঃ

$$x+17y-2z = 48$$
$$30x-2y+3z = 75$$
$$2x+2y+18z = 30$$

(b) Derive Newton-Gregory forward difference interpolation formula. Use it to obtain an interpolating polynomial for given data.

Interpolate at $x = 0{\cdot}25$

নিউটন-গ্রেগৰী অগ্ৰগামী অন্তৰ্ৰেশন সূত্ৰটো প্ৰাপ্ত কৰা। ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰি অন্তৰ্ৰেশন বহুপদ উলিওৱা। $x = 0{\cdot}25$ ৰ মান উলিওৱা।

x	0·1	0·2	0·3	0·4	0·5
$f(x)$	1·40	1·56	1·76	2·00	2·28

(c) (i) Prove that the divided differences are symmetrical in their arguments. 5

প্ৰমাণ কৰা যে বিভাজিত অন্তৰবোৰ সিহতৰ x ৰ মানবোৰৰ (arguments) সমমিত।

(ii) Construct a divided difference table for the following data : 5

তলত দিয়া তালিকাখনৰ পৰা এখন বিভাজিত অন্তৰৰ টেবুল গঠন কৰা ঃ

x	1	2	4	7	12
$f(x)$	22	30	82	106	216

(d) (i) Determine the function whose first difference is

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 12$$ 5

এটা ফলন নিৰ্ণয় কৰা য'ত ফলনটোৰ প্ৰথম অন্তৰ

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 12$$

(ii) Given that (দিয়া আছে)

$$\sin 45° = 0{\cdot}7071, \ \sin 50° = 0{\cdot}7660$$
$$\sin 55° = 0{\cdot}8192, \ \sin 60° = 0{\cdot}8660$$

Find the value of $\sin 52°$. 5

তেন্তে $\sin 52°$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

(e) How can you find formulas for higher derivatives in numerical methods? Name a technique for improving the accuracy of a low order approximation formula.

Find the first three derivatives of the function tabulated below at point $x = 2\cdot5$. 1+1+8=10

সংখ্যাত্মক পদ্ধতিত উচ্চতৰ অৱকলজৰ সূত্ৰ কেনেকৈ উলিওৱাব পাৰি? শুদ্ধতা উন্নত কৰা কৌশল এটাৰ নাম লিখা।

তলৰ তালিকাৰ পৰা $f'(2\cdot5)$, $f''(2\cdot5)$ আৰু $f'''(2\cdot5)$ উলিওৱা ঃ

x	1·5	1·9	2·5	3·2	4·3	5·9
$f(x)$	3·375	6·059	13·625	29·368	73·907	196·579

(f) Define numerical integration. Obtain a general quadrature formula for $\int_a^b f(x)\,dx$. Hence deduce Simpson's $\frac{1}{3}$rd rule. 1+5+4=10

সাংখিক অনুকলন মানে কি বুজা? $\int_a^b f(x)\,dx$ ৰ সাধাৰণ বৰ্গকিৰণ সূত্ৰটো উলিওৱা। ইয়াৰ পৰা চিম্পচনৰ $\frac{1}{3}$তম নিয়মৰ সূত্ৰটো উলিওৱা।

(g) Evaluate $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$ using Romberg's method.

Romberg's পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।